

Chapitre II

DISCRETISATION DES EDP

II.1 LES TROIS GRANDES FAMILLES DE METHODES

Pour passer d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

- **Les différences finies.**

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

- **Les volumes finis.**

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en oeuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles.

Avantages : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.

Inconvénient : peu de résultats théoriques de convergence.

- **Les éléments finis.**

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou noeuds du maillage.

Avantages : traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

Inconvénient : complexité de mise en oeuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

II.2 LES DIFFERENCES FINIES

II.2.1 Principe - ordre de précision

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).

Soit $u(x, y, z, t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

Si Δx est petit, un développement de Taylor de $u(x + \Delta x, y, z, t)$ au voisinage de x donne :

$$u(x + \Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y, z, t) + \dots$$

En **tronquant** la série au premier ordre en Δx , on obtient :

$$\frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est alors d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature $\mathcal{O}(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de Δx .

Définition : la puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée **l'ordre de la méthode**.

II.2.2 Notation indicielle - cas 1D

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas Δx . Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les noeuds du maillage.

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents noeuds du maillage.

Notation : on note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i , on note $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i$. Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u .

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

II.2 LES DIFFERENCES FINIES

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant" ou upwind.

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

II.2.3 Schéma d'ordre supérieur

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i . On écrit :

$$\begin{aligned}u_{i+1} &= u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\u_{i-1} &= u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)\end{aligned}$$

La soustraction de ces deux relations donne : $u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs noeuds voisins de x_i . Le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

II.2.4 Dérivée d'ordre supérieur

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i . Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u , on écrit :

$$\begin{aligned}u_{i+1} &= u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\u_{i-1} &= u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4)\end{aligned}$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à : $u_{i+1} - u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4)$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...

II.2.5 Généralisation de la notation indicielle

Dans le cas 1D instationnaire, considérons l'évolution d'une grandeur $u(x, t)$ en fonction de l'espace et du temps. Le domaine de définition de u est décomposé en N noeuds x_i répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx . De même, le temps est décomposé en intervalle élémentaire de pas constant Δt . On notera u_i^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, t)$ au noeud x_i et au temps $n\Delta t$.

Dans le cas 2D, considérons une grandeur $u(x, y)$ définie sur un certain domaine. Ce dernier est décomposé en $N \times P$ noeuds (x_i, y_j) répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx dans la direction x et Δy dans l'autre direction. On notera u_{ij} la valeur discrète de la grandeur $u(x, y)$ au noeud (x_i, y_j) .

De façon similaire, dans le cas 2D instationnaire, on notera u_{ij}^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, y, t)$ au noeud x_i, y_j et au temps $n\Delta t$. Et dans le cas 3D instationnaire, on notera u_{ijk}^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, y, z, t)$ au noeud (x_i, y_j, z_k) et au temps $n\Delta t$.

II.2.6 Quelques schémas en 1D

Différences finies avant, ordre 1

	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
$\Delta x u'_i$	-1	1			
$\Delta x^2 u''_i$	1	-2	1		
$\Delta x^3 u'''_i$	-1	3	-3	1	
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies arrière, ordre 1

	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i
$\Delta x u'_i$				-1	1
$\Delta x^2 u''_i$			1	-2	1
$\Delta x^3 u'''_i$		-1	3	-3	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 2

	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}
$2\Delta x u'_i$		-1		1	
$\Delta x^2 u''_i$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u'''_i$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 4

	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}
$12\Delta x u'_i$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u''_i$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u'''_i$	-1	-8	13	0	-13	8	-1
$6\Delta x^4 u^{(4)}_i$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

II.2.7 Dérivées croisées

Déterminons une approximation de la dérivée croisée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ de la fonction de 2 variables $f(x, y)$. La discrétisation du domaine de calcul est bidimensionnelle et fait intervenir deux pas d'espace supposés constants Δx et Δy dans les directions x et y .

II.2 LES DIFFERENCES FINIES

La principe est toujours basé sur les développements de Taylor :

$$f(x_{i+l}, y_{j+m}) = f(x_i, y_j) + l\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + m\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j + \frac{(l\Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(m\Delta y)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_j + \frac{2ml\Delta x\Delta y}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{i,j} + \dots$$

Au voisinage du point (i, j) :

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j + \Delta x\Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i$$

$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i - \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j + \Delta x\Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i - \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j - \Delta x\Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i$$

$$f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j - \Delta x\Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i$$

En effectuant une combinaison linéaire des quatre équations précédentes ((1)+(2)-(3)-(4)), nous obtenons une approximation de la dérivée croisée à l'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta y}$$

II.2.8 Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta \end{cases}$$

où f est une fonction continue.

Le maillage est construit en introduisant $N + 1$ noeuds x_i avec $i = 0, 1, \dots, N$, régulièrement espacés avec un pas Δx . La quantité u_i désignera la valeur de la fonction $u(x)$ au noeud x_i .

L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque noeud x_i :

$$-\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = f(x_i) = f_i$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2 :

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

L'équation discrétisée est ainsi :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i \quad ; \text{ pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N-1$$

Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes :

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \beta/\Delta x^2 \end{bmatrix}$$

II.2.9 Exemple simple 1D avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

où l'on a cette fois une condition de Neumann en $x = 1$.

Les modifications du problème discrétisé par rapport au cas précédent sont les suivantes. Tout d'abord, le nombre d'inconnues a changé. Il y a une inconnue au bord en $x = 1$. Le problème discret a donc maintenant, sur la base du même maillage que précédemment, N inconnues u_i pour i variant de 1 à N .

D'autre part, il faut discrétiser la condition de Neumann $u'(1) = \beta$. Plusieurs choix sont possibles pour approximer cette dérivée première. C'est un des inconvénients de la méthode des différences finies : elle ne donne pas de façon naturelle une bonne approximation des conditions de Neumann.

Dans notre cas, utilisons une approximation d'ordre 1 : $u'(1) = \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x}$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ \beta/\Delta x \end{bmatrix}$$

II.2 LES DIFFERENCES FINIES

II.2.10 Discrétisation de l'équation de la chaleur 1D

Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de 1m de longueur. Le champ de température $T(x, t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où α est la diffusivité thermique.

A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre $T(0, t) = T_g$ et $T(1, t) = T_d$ ainsi qu'une condition initiale $T(x, 0) = T_0$.

L'intervalle $[0, 1]$ est discrétisé en $N + 1$ noeuds de coordonnées x_i (i variant de 0 à N) régulièrement espacés. Notons Δx le pas d'espace. Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt . Notons T_i^n la température au noeud $x_i = i\Delta x$ et à l'instant $t = n\Delta t$.

On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation de la chaleur. La première dite **explicite** utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération courante n :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n$$

Et la seconde dite **implicite** utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération $n + 1$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1}$$

II.2.10.1 Schéma explicite

Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n &= \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n &= \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la température à l'itération $n + 1$ est donnée par :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)T_i^n + \lambda T_{i+1}^n \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N-1$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 - 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$



II.2.10.2 Schéma implicite

Nous utilisons un schéma arrière d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la température à l'itération $n + 1$ est donnée par :

$$(1 + 2\lambda)T_i^{n+1} - \lambda(T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) = T_i^n \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N-1$$

On constate que les inconnues à l'itération $n + 1$ sont reliées entre elles par une relation implicite (d'où le nom de la méthode).

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

A chaque itération, le vecteur des inconnues discrètes se détermine par résolution d'un système

II.2 LES DIFFERENCES FINIES

II.2.11 Discrétisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire

Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur dans un domaine rectangulaire $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Le champ de température $T(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & , \quad (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ T(0, y) = T_g \quad \text{et} \quad T(L_x, y) = T_d & 0 < y < L_y \\ T(x, 0) = T_b \quad \text{et} \quad T(x, L_y) = T_h & 0 < x < L_x \end{cases}$$

Le domaine de calcul est discrétisé en $(N+1) \times (P+1)$ noeuds (x_i, y_j) (i variant de 0 à N et j variant de 0 à P). On supposera que les pas d'espace dans chaque direction Δx et Δy sont constants. La température discrète au noeud (x_i, y_j) sera notée $T_{ij} = T(x_i, y_j)$.

Nous utilisons un schéma centré d'ordre 2 pour approximer les dérivées secondes en espace :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{ij} &= \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{ij} &= \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \end{aligned}$$

La formulation discrétisée est alors, pour i variant de 1 à $N-1$ et j variant de 1 à $P-1$:

$$\Delta y^2 (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2)T_{i,j} = 0$$

Soit sous forme matricielle, pour $N=P=4$, en posant $A = \Delta x^2 + \Delta y^2$:

$$\begin{bmatrix} -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_b \\ \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_d \\ \Delta y^2 T_g \\ 0 \\ \Delta y^2 T_d \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_h \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_d \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les pas d'espace sont identiques $\Delta x = \Delta y$, la formulation devient, pour i variant de 1 à $N-1$ et j variant de 1 à $P-1$:

$$T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0$$

Soit sous forme matricielle, pour $N=P=4$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \\ T_g \\ 0 \\ T_d \\ T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{bmatrix}$$

Notons I la matrice identité d'ordre 3 et D la matrice de dimension 3 définie par :

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Notons T_1 , T_2 et T_3 les vecteurs à 3 composantes définis par :

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix}$$

Le système peut s'écrire sous la forme matricielle bloc suivante :

$$\begin{bmatrix} D & I & 0 \\ I & D & I \\ 0 & I & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

La matrice obtenue est tridiagonale et chacun de ses blocs est tridiagonal. La résolution du système peut s'effectuer par une méthode de Thomas matriciel où une méthode itérative matricielle (méthode de Gauss-Seidel).

II.3 LES VOLUMES FINIS

II.3.1 Introduction

La méthode des Volumes Finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale **des lois de conservation**, contrairement aux Eléments Finis, et est ainsi très utilisée en mécanique des fluides.

Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" sont des rectangles en 2D ou des parallélépipèdes en 3D. Cependant, la méthode des Volumes Finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes, contrairement aux Différences Finies.

De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode : Fluent, StarCD, CFX, FineTurbo, elsA...

II.3.2 Volumes Finis pour une loi de conservation

Considérons une loi de conservation d'une grandeur physique w dans une maille de volume Ω , faisant intervenir un flux $F(w)$ et un terme source $S(w)$. Son expression sous forme intégrale est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} F(w) d\Omega = \int_{\Omega} S(w) d\Omega$$

Appelons Σ la surface de la maille, de normale extérieure n . Le théorème d'Ostrogradski conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w d\Omega + \oint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma = \int_{\Omega} S d\Omega$$

L'intégrale $\oint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma$ représente la somme des flux à travers chaque face de la maille. Le flux est supposé constant sur chaque face, l'intégrale se ramène à une somme discrète sur chaque face de la maille. Il vient :

$$\oint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma = \sum_{\text{faces de la maille}} F_{\text{face}} \cdot n_{\text{face}} \Sigma_{\text{face}}$$

La quantité $F_{\text{face}} = F(w_{\text{face}})$ est une approximation du flux F sur une face de la maille, c'est **le flux numérique** sur la face considérée.

La discrétisation spatiale revient à calculer le bilan des flux sur une maille élémentaire. Ce bilan comprend la somme des contributions évaluées sur chaque face de la maille. La manière dont on approche les flux numériques en fonction de l'inconnue discrète détermine **le schéma numérique**. L'écriture du schéma numérique peut également utiliser des inconnues auxiliaires, par exemple le gradient de l'inconnue par maille.

II.3 LES VOLUMES FINIS

Explicitons maintenant le terme de dérivée temporelle. Un élément fondamental de la discrétisation en Volumes Finis est de supposer que **la grandeur w est constante dans chaque maille** et égale à une valeur approchée de sa moyenne sur la maille ou bien à sa valeur au centre de la maille.

D'autre part, le terme de dérivation en temps est évalué au moyen d'une méthode numérique d'intégration d'équation différentielle (Runge-Kutta, Euler explicite ou implicite...) et fait intervenir un pas de temps d'intégration Δt . Ce dernier peut être constant ou variable. Pour fixer les idées, on écrira la formulation avec une méthode d'Euler explicite. Notons Δw l'incrément de la grandeur w entre deux itérations temporelles successives. On peut ainsi écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w d\Omega = \Omega \left(\frac{dw}{dt} \right)_{maille} = \Omega \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

Finalement la loi de conservation discrétisée avec la méthode des Volumes Finis peut s'écrire :

$$\Omega \frac{\Delta w}{\Delta t} + \sum_{faces} F_{face} \cdot n_{face} \Sigma_{face} = \Omega S$$

La méthodes des Volumes Finis consiste donc à :

- Décomposer la géométrie en mailles élémentaires (élaborer un maillage).
- Initialiser la grandeur w sur le domaine de calcul.
- Lancer le processus d'intégration temporelle jusqu'à convergence avec :
 - ★ Calcul du bilan de flux par maille par un schéma numérique.
 - ★ Calcul du terme source.
 - ★ Calcul de l'incrément temporel par une méthode numérique d'intégration.
 - ★ Application des conditions aux limites.

II.3.2.1 Cas monodimensionnel

Considérons une loi de conservation 1D :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u dx + \int \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx = 0$$

Où u est une grandeur physique fonction de la variable d'espace x et du temps t et $f(u)$ est une fonction de u .

Le domaine de calcul est divisé en N mailles de centre x_i . Chaque maille a une taille $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Les indices demi-entier désignent les interfaces de la maille avec les mailles voisines (voir figure II.1).

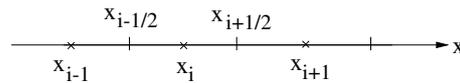


FIG. II.1 – Maillage 1D

Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt . La fonction u est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne. Notons u_i^n cette valeur moyenne dans la i -ème maille de centre x_i , à l'instant $t = n\Delta t$. Ainsi :

$$\forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \text{ et } t = n\Delta t, \quad u(x, t) = u_i^n$$

Souvent, cette valeur approchée de la moyenne est la valeur de la fonction u au centre x_i de la maille, on parle alors de Volumes Finis Cell-Centered (et dans ce cas, $u_i^n = u(x_i, t)$).

Le discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer maille par maille la loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{maille}} u \, dx + \int_{\text{maille}} \frac{\partial f(u)}{\partial x} \, dx = 0$$

Soit pour la i -ème maille de centre x_i , au temps $t = n\Delta t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u \, dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial f}{\partial x} \, dx = 0$$

Ce qui s'intègre comme suit :

$$h_i \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \hat{f}_{i+1/2}^n - \hat{f}_{i-1/2}^n = 0$$

La quantité $\hat{f}_{i+1/2}^n$ désigne une approximation du flux $f(u)$ à l'interface $x_{i+1/2}$ et au temps $n\Delta t$. C'est le flux numérique au point $x_{i+1/2}$. Ce flux numérique s'évalue en fonction des valeurs moyennes de u dans les mailles voisines, ce qui détermine le schéma numérique.

Une méthode d'Euler explicite est utilisée pour évaluer la dérivée en temps (d'autres schémas peuvent être utilisés, par exemple le schéma de Runge-Kutta). La formulation discrétisée en Volumes Finis de la loi de conservation est ainsi :

$$h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \hat{f}_{i+1/2}^n - \hat{f}_{i-1/2}^n = 0$$

II.3 LES VOLUMES FINIS

II.3.2.2 Cas bidimensionnel

Considérons une loi de conservation d'une grandeur physique $u(x, y, t)$ où x et y sont les deux directions d'espace. Le domaine géométrique est divisé en mailles élémentaires, par exemple en mailles rectangulaires comme représenté sur la figure II.2. La grandeur u est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne sur la maille (ou encore à la valeur au centre de la maille).

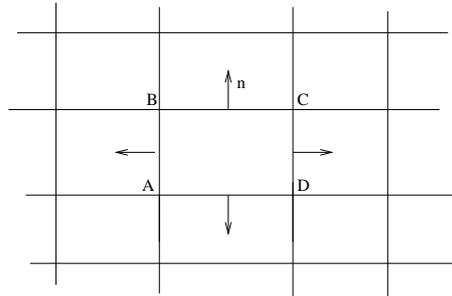


FIG. II.2 – Maillage 2D

Dans le cas bidimensionnel, le terme intégral $\oint_{\Sigma} F.n d\Sigma$ représente la circulation sur un contour d'une maille élémentaire. Plaçons-nous sur la maille de contour $ABCD$ comme indiqué sur la figure. Le flux F est supposé constant sur chaque arête de la maille AB , BC , CD et AD . L'intégrale se ramène à une somme discrète sur chaque arête :

$$\oint_{\Sigma} F.n d\Sigma = \oint_{ABCD} F.n dl = \sum_{AB,BC,CD,AD} F_{arete}.n_{arete} Longueur_{arete}$$

Ceci revient à évaluer le bilan des flux à travers chaque facette de la maille.

II.3.3 Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta \end{cases}$$

où f est une fonction continue.

L'intervalle $]0,1[$ est discrétisé en N mailles de centre x_i et de taille $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. La fonction $u(x)$ est supposé constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne sur la maille considérée. On notera u_i cette valeur dans la i -ème maille de centre x_i . Ainsi, on a dans la i -ème maille : $\forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $u(x) = u_i$.

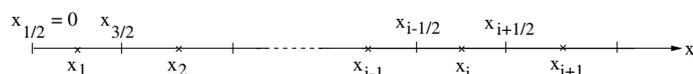


FIG. II.3 – Maillage 1D

La discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer maille par maille l'équation différentielle du problème, soit pour la i -ème maille :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx$$

Ce qui donne après intégration :

$$u'(x_{i-1/2}) - u'(x_{i+1/2}) = h_i \tilde{f}_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

où \tilde{f}_i désigne la valeur moyenne de f sur la i -ème maille : $\tilde{f}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx$

Il reste maintenant à exprimer $u'(x_{i-1/2})$ en fonction des inconnues u_i . L'approximation la plus naturelle est de prendre la valeur moyenne de $u'(x)$ sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$, soit :

$$u'(x_{i-1/2}) = \frac{1}{\frac{h_{i-1}+h_i}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) dx = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1/2}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}}$$

avec $h_{i-1/2} = \frac{h_{i-1} + h_i}{2}$

Cette dernière expression n'est pas valable au bord gauche, pour $i = 1$, en $x_{1/2} = 0$, car elle fait intervenir le point x_0 qui n'est pas défini. Il se pose alors le problème du traitement des bords qui exige une formulation particulière. Une possibilité est de définir une maille fictive à gauche de l'intervalle $[0,1]$, et d'affecter une valeur moyenne de la fonction u dans cette maille. Une autre possibilité est de considérer la valeur moyenne de $u'(x_{1/2})$ non plus sur le segment $[x_0, x_1]$ qui

II.3 LES VOLUMES FINIS

n'est pas défini mais sur le segment $[x_{1/2}, x_1]$, c'est ce que nous choisissons dans cet exemple. Ainsi on écrit :

$$u'(x_{1/2}) = \frac{2}{h_1} \int_{x_{1/2}}^{x_1} u'(x) dx = \frac{2(u_1 - u(0))}{h_1} = \frac{2(u_1 - \alpha)}{h_1}$$

Et de même pour le terme $u'(x_{i+1/2})$, on écrit que : $u'(x_{i+1/2}) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}$. Le même problème survient au bord droit, pour $i = N$, en $x_{N+1/2} = 1$. On considère la valeur moyenne de $u'(x_{N+1/2})$ non plus sur le segment $[x_N, x_{N+1}]$ qui n'est pas défini mais sur le segment $[x_N, x_{N+1/2}]$, soit :

$$u'(x_{N+1/2}) = \frac{2}{h_N} \int_{x_N}^{x_{N+1/2}} u'(x) dx = \frac{2(u(1) - u_N)}{h_N} = \frac{2(\beta - u_N)}{h_N}$$

La discrétisation en Volumes Finis est donc finalement :

$\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} = h_i \tilde{f}_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 2 \text{ à } N-1$ $\frac{2(u_1 - \alpha)}{h_1} - \frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} = h_1 \tilde{f}_1$ $\frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} - \frac{2(\beta - u_N)}{h_N} = h_N \tilde{f}_N$
--

Dans le cas particulier d'un maillage régulier de pas h . La discrétisation en Volumes Finis devient :

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = \tilde{f}_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 2 \text{ à } N-1$$

$$\frac{3u_1 - u_2}{h^2} = \tilde{f}_1 + \frac{2\alpha}{h^2}$$

$$\frac{3u_N - u_{N-1}}{h^2} = \tilde{f}_N + \frac{2\beta}{h^2}$$

Sous forme matricielle, ceci s'exprime :

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 + 2\alpha/h^2 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{N-1} \\ \tilde{f}_N + 2\beta/h^2 \end{bmatrix}$$

II.3 LES VOLUMES FINIS

II.3.4 Exemple simple 1D avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

où l'on a cette fois une condition de Neumann en $x = 1$.

On se place sur le même maillage que précédemment et on adopte la même démarche.

L'équation intégrée sur une maille élémentaire est :

$$u'(x_{i-1/2}) - u'(x_{i+1/2}) = h_i \tilde{f}_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

Le calcul des termes de dérivée aux interfaces s'effectue de la même manière que précédemment. Au bord droit, à l'interface $x_{N+1/2} = 1$, l'application de la condition $u'(1) = \beta$ s'applique très naturellement et l'on a : $u'(x_{N+1/2}) = \beta$.

La discrétisation en Volumes Finis est donc finalement :

$$\begin{aligned} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} &= h_i \tilde{f}_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 2 \text{ à } N-1 \\ \frac{2(u_1 - \alpha)}{h_1} - \frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} &= h_1 \tilde{f}_1 \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} - \beta &= h_N \tilde{f}_N \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un maillage régulier de pas h . La discrétisation en Volumes Finis devient :

$$\begin{aligned} \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} &= \tilde{f}_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 2 \text{ à } N-1 \\ \frac{3u_1 - u_2}{h^2} &= \tilde{f}_1 + \frac{2\alpha}{h^2} \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h^2} &= \tilde{f}_N + \frac{\beta}{h} \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, ceci s'exprime :

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 + 2\alpha/h^2 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{N-1} \\ \tilde{f}_N + \beta/h \end{bmatrix}$$

Created with

II.3.5 Discrétisation de l'équation de la chaleur 1D

Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de 1m de longueur. Le champ de température $T(x, t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où α est la diffusivité thermique que l'on supposera égale à 1.

A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre $T(0, t) = T_g$ et $T(1, t) = T_d$ ainsi qu'une condition initiale $T(x, 0) = T_0$.

L'intervalle $[0,1]$ est discrétisé en N mailles de centre x_i (i variant de 1 à N), de taille $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ constante. Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt . A chaque instant, la température $T(x, t)$ est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne sur la maille considérée. On notera T_i^n cette valeur dans la i -ème maille de centre x_i à l'instant $t = n\Delta t$.

La discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer maille par maille l'EDP du problème, soit pour la i -ème maille :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial T}{\partial t} dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$

Nous utilisons un schéma d'Euler explicite pour évaluer la dérivée temporelle, il vient :

$$\Delta x \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}}^n - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}}^n \right]$$

Les termes de dérivée première aux interfaces $x_{i+1/2}$ sont évalués en considérant la valeur moyenne de $\frac{\partial T}{\partial x}$ sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$, soit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x}$$

Cette formulation n'est pas valable dans la maille N à l'extrémité droite de la barre. Dans cette maille, on considère la valeur moyenne calculée sur l'intervalle $[x_N, 1]$. D'où :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{N+1/2}}^n = \frac{2}{\Delta x} \int_{x_N}^1 \frac{\partial T}{\partial x} dx = 2 \frac{T_d^n - T_N^n}{\Delta x}$$

De même, les termes de dérivée première aux interfaces $x_{i-1/2}$ sont évalués en considérant la valeur moyenne de $\frac{\partial T}{\partial x}$ sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$, soit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}$$

II.3 LES VOLUMES FINIS

Avec un problème dans la première maille à l'extrémité gauche de la barre. Dans cette maille, on considère la valeur moyenne calculée sur l'intervalle $[0, x_1]$. D'où :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_{1/2}}^n = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{x_1} \frac{\partial T}{\partial x} dx = 2 \frac{T_1^n - T_g^n}{\Delta x}$$

En posant $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la température à l'itération $n + 1$ est donnée par :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)T_i^n + \lambda T_{i+1}^n \quad i \text{ variant de } 2 \text{ à } N-1$$

$$T_1^{n+1} = 2\lambda T_g + (1 - 3\lambda)T_1^n + \lambda T_2^n$$

$$T_N^{n+1} = \lambda T_{N-1}^n + (1 - 3\lambda)T_N^n + 2\lambda T_d^n$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1-3\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-3\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + 2\lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

II.3.6 Discrétisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire

Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur dans un domaine rectangulaire $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Le champ de température $T(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & , \quad (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ T(0, y) = T_g \quad \text{et} \quad T(L_x, y) = T_d & 0 < y < L_y \\ T(x, 0) = T_b \quad \text{et} \quad T(x, L_y) = T_h & 0 < x < L_x \end{cases}$$

Le domaine de calcul est discrétisé en $N \times P$ mailles de centre (x_i, y_j) (i variant de 1 à N et j variant de 1 à P). On supposera que les pas d'espace dans chaque direction $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ et $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ sont constants.

La température $T(x, y)$ est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne sur la maille considérée. On notera T_{ij} cette valeur dans la maille (i, j) .

La discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer maille par maille l'EDP du problème, soit pour la maille (i, j) de centre (x_i, y_j) :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy = 0$$

Il vient :

$$\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}} \right] dy + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_{j+1/2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_{j-1/2}} \right] dx = 0$$

Le terme de dérivée première $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}}$ à l'interface $x_{i+1/2}$ est évalué en calculant une valeur moyenne sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{T_{i+1,j} - T_{ij}}{\Delta x}$$

De même, le terme $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}}$ à l'interface $x_{i-1/2}$ est évalué en calculant une valeur moyenne sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}} \right] dy &= \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[\frac{T_{i+1,j} - T_{ij}}{\Delta x} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \right] dy \\ &= \Delta y \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{ij}}{\Delta x} \end{aligned}$$

En opérant identiquement pour les termes $\frac{\partial T}{\partial y}$ aux interfaces $y_{j+1/2}$ et $y_{j-1/2}$, on aboutit à l'expression suivante valable pour i variant de 2 à $N-1$ et j variant de 2 à $P-1$:

$$\Delta y^2 (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) T_{ij} = 0$$

Cette relation n'est pas valable aux bords du domaine pour lesquels les termes de dérivées premières sont évalués en considérant une valeur moyenne sur une demie-maille.

Par exemple, pour la dérivée $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{1/2}}$, la valeur moyenne sera calculée sur l'intervalle $[0, x_1]$ et fera intervenir les conditions aux limites (la température T_g au bord gauche) :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_{1/2}} = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{x_1} \frac{\partial T}{\partial x} dx = 2 \frac{T_{1j} - T_g}{\Delta x}$$

Ainsi pour les cellules adjacentes au bord gauche ($i = 1$, j variant de 1 à P), la formulation est :

$$\begin{aligned} \Delta y^2 (T_{2,j} + 2T_g) + \Delta x^2 (T_{1,j+1} + T_{1,j-1}) - (2\Delta x^2 + 3\Delta y^2) T_{1j} &= 0 \quad ; j=2 \text{ à } P-1 \\ \Delta y^2 (T_{21} + 2T_g) + \Delta x^2 (T_{12} + 2T_b) - 3(\Delta x^2 + \Delta y^2) T_{11} &= 0 \quad ; j=1 \\ \Delta y^2 (T_{2P} + 2T_g) + \Delta x^2 (2T_h + T_{1,P-1}) - 3(\Delta x^2 + \Delta y^2) T_{1P} &= 0 \quad ; j=P \end{aligned}$$

II.3 LES VOLUMES FINIS

On aura une formulation équivalente pour les cellules adjacentes aux 3 autres bords du domaine. Soit sous forme matricielle, pour $N=P=3$, en posant $A = \Delta x^2 + \Delta y^2$, $B = 3\Delta x^2 + 2\Delta y^2$ et $C = 2\Delta x^2 + 3\Delta y^2$:

$$\begin{bmatrix} -3A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta y^2 & -B & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y^2 & -3A & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x^2 & 0 & 0 & -C & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -C & 0 & 0 & \Delta x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & -3A & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -B & \Delta y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -3A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_b \\ \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_d \\ \Delta y^2 T_g \\ 0 \\ \Delta y^2 T_d \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_h \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_d \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les pas d'espace sont identiques $\Delta x = \Delta y$, la formulation matricielle, pour $N=P=3$ devient :

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \\ T_g \\ 0 \\ T_d \\ T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{bmatrix}$$

Remarque : dans le cas de conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann, la condition de flux de chaleur est prise en compte très simplement, directement dans les termes de dérivées aux interfaces du bord concerné.

II.4 LES ELEMENTS FINIS EN 1D

II.4.1 Introduction

La méthode des Eléments Finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. Cette forme variationnelle est équivalente à une forme de minimisation de l'énergie en général (principe des travaux virtuels). La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres, par exemple, ses valeurs en certains points (les noeuds du maillage).

Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux problèmes d'équilibre. Elle permet de traiter des géométries complexes contrairement aux Différences Finies mais elle demande un grand coût de temps de calcul et de mémoire.

De nombreux codes de calculs de structure reposent sur les Eléments Finis : ANSYS, CADD5, CATIA...

II.4.2 Exemple simple 1D

Reprenons le cas précédent de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La présentation très succincte faite sur cet exemple simple a pour but de donner les idées de base et ne constitue qu'une première introduction à la méthodes des Eléments Finis. L'approche repose sur la **méthode de Galerkin** qui permet d'écrire le système différentiel sous forme variationnelle dans un espace de dimension finie.

Soit une fonction $v(x) \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, nulle en 0 et 1. On peut écrire :

$$-\int_0^1 u''(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx \quad \forall v \in V \quad (\text{II.1})$$

avec $V = \{v \in \mathcal{C}^0([0, 1]); v(0) = v(1) = 0, v' \text{ continue par morceaux}\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0, 1])$.

Une solution de la forme variationnelle (II.1) s'appelle **solution faible** du problème différentiel de départ.

II.4 LES ELEMENTS FINIS EN 1D

On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit \tilde{V} un sous-espace vectoriel de V de dimension N finie. Soient $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ N fonctions linéairement indépendantes de V . Ces fonctions constituent une base du sous-espace \tilde{V} . Ainsi, toute fonction \tilde{u} de \tilde{V} peut se décomposer selon :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$$

Résoudre le problème différentiel de départ revient alors à chercher une solution $\tilde{u} \in \tilde{V}$ telle que :

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x) \tilde{v}'(x) dx = \int_0^1 f(x) \tilde{v}(x) dx \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}$$

C'est-à-dire chercher N réels u_1, u_2, \dots, u_N vérifiant :

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi_j'(x) \tilde{v}'(x) dx = \int_0^1 f(x) \tilde{v}(x) dx \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}$$

Ou encore :

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx \quad \forall \phi_i \in \tilde{V}$$

Soient A la matrice $N \times N$ d'élément courant a_{ij} et B le vecteur à N composantes b_i définies par :

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx \quad \text{et} \quad b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx$$

Par définition, la matrice A est symétrique. Notons U le vecteur des N inconnues u_1, u_2, \dots, u_N . Le problème différentiel se ramène finalement à la résolution du système linéaire :

$$A.U = B$$

Il reste maintenant à choisir les N fonctions ϕ_i de façon à ce que le système soit simple à résoudre numériquement.

II.4.2.1 Choix des fonctions ϕ_i : les éléments finis

L'intervalle $]0,1[$ est discrétisé en N points de coordonnées x_i . Les fonctions $\phi_i(x)$ sont choisies comme fonctions polynomiales de degré 1 définies par :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Created with



nitroPDF professional

download the free trial online at nitropdf.com/professional

Ces fonctions sont appelées les éléments finis de degré 1. Avec ces éléments finis, la matrice A est tridiagonale. Il est aussi possible de choisir pour éléments finis des fonctions de degré 2 ou plus.

Le calcul de la matrice A fait intervenir les dérivées $\phi'_i(x)$ simples à calculer :

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculons maintenant les éléments de la matrice A , tridiagonale et symétrique. Les trois termes des diagonales sont :

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \\ a_{i,i+1} &= \int_0^1 \phi'_{i+1}(x) \phi'_i(x) dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i} \\ a_{i-1,i} &= \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_{i-1}(x) dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned}$$

Et calculons les composantes du vecteur B par une méthode des trapèzes (chaque intégrale sur un segment élémentaire sera évaluée comme l'aire du trapèze correspondant), soit :

$$b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = f_i \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \right)$$

Le système linéaire à résoudre s'écrit donc, sous forme indicielle :

$$\boxed{\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} f_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N}$$

On rappelle la discrétisation avec un schéma aux Différences Finies d'ordre 2 :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} f_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

Ainsi, on constate que les deux méthodes sont rigoureusement identiques. Ceci n'est plus vérifié quand les composantes du vecteur B ne sont plus évaluées avec une méthode des trapèzes.

II.4 LES ELEMENTS FINIS EN 1D

Dans le cas où les N points de l'intervalle $]0,1[$ sont régulièrement espacés avec un pas h . La discrétisation en Eléments Finis devient :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} = f_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

Soit sous forme matricielle :

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}$$

II.4.2.2 Bilan

La méthodes des Eléments Finis 1D consiste donc à :

- Choisir N points entre 0 et 1 et choisir les fonctions ϕ_i
- Construire la matrice A
- Déterminer le vecteur B (avec une méthode d'intégration)
- Résoudre le système linéaire $A.U = B$ où U désigne le vecteur des inconnues